４章　ラーメンの応力解析

4.1　ラーメンの応力解析の基本的考え方

実際の鉄筋コンクリート（RC）構造や鉄骨構造は、梁と柱の接合部分が一体に作られているラーメン構造が一般的である。ラーメン構造は、柱・梁の節点を回転させると、その節点に集まっている梁も柱も回転角（たわみ角）を起こす。この性質を利用して、連続梁と全く同じ様な方法で、ラーメン骨組の応力を計算することができる。

基本事項

節点に集まる固定端モーメントと外力が釣り合っているとき、節点には回転は起こらない。

(1) 不釣合モーメント
一方、これらが釣り合わないときは回転を起こそうとする。これ（外力－固定端モーメント）を不釣合モーメントという。

(2) 分配モーメント
不釣合モーメントは、節点の各部材に剛比の比率で分配される。

(3) 到達モーメント
節点で分配された材端モーメントの 1/2 がもう一方の材端にも生じる。

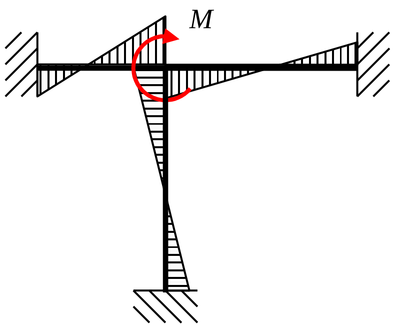


図 4.1

4.2　鉛直荷重を受けるラーメン

鉛直荷重を受ける様々なラーメンについて、応力解析を行って、梁や柱の断面やスパン（剛比）が変化するときに、骨組にどのような応力が生じるか調べてみよう。

(1) 柱と梁の剛比が梁応力に及ぼす影響

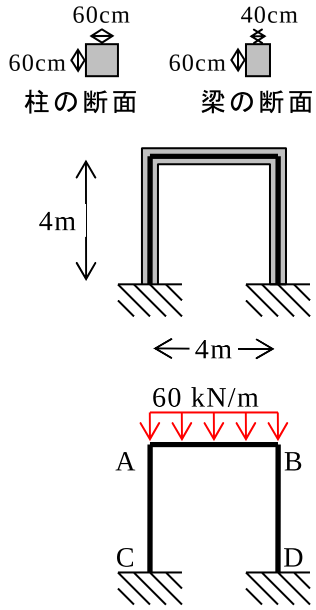


図 4.2

図のような、1 層 1 スパンラーメンの鉛直荷重に対する応力を求めてみよう。構造解析では、柱や梁のように長細い部材を**線材**といい、その断面の中心を通るような線で表現して、構造解析を行う。
1 章で学んだように、RC 造建物には、自重と積載荷重をあわせると平均的に 12kN/m^2（1m^2 あたり 1.2t の質量）程度の鉛直荷重が作用している。柱の自重は直接柱に作用するが、その他の床や壁、梁の自重や家具などの積載荷重は、まず梁に作用して梁のせん断力として、柱に伝わっていく。
図の骨組では、梁が支える鉛直荷重は、柱の自重を除いて 10kN/m^2 とする。梁が支える床の幅が直交方向に 6m であるとし、その荷重が梁に均等に作用するとすれば、等分布荷重 w は、

$$w = 10\,kN/m^2 \times 6m = 60\,kN/m$$

となる。柱と梁の断面はそれぞれ 60cm 角と 40cm×60cm、スパンはそれぞれ 4m なので、剛比は以下となる。

$$k_{AC} : k_{AB} = \frac{0.6\times 0.6^3/12}{4} : \frac{0.4\times 0.6^3/12}{4} = \frac{0.6}{4} : \frac{0.4}{4} = 3:2$$

（断面 2 次モーメント $I = bD^3/12$）

	CA		AC	AB
DF			0.75	0.25
FEM				-80
D			60	20
C	30			
Σ	30		60	-60

梁の固定端モーメントは、

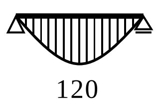
$$C = \frac{wL^2}{12} = \frac{60\times 4^2}{12} = 80\,kN\cdot m$$

梁の対象性を考えて有効剛比を用いて固定法で応力を求め、M 図、Q 図、N 図を描くと図のようになる。
梁端の曲げモーメントは 60kN･m、梁中央の曲げモーメントは、

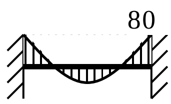
$$\frac{wL^2}{8} - 60 = \frac{60\times 4^2}{8} - 60 = 120 - 60 = 60\,kN\cdot m$$

である。
梁端や梁中央の曲げモーメントは、同じ荷重を受ける単純梁と両端固定梁の曲げモーメントの中間の値になっている。

固定法の計算をしてみてわかるように、この骨組で柱の断面寸法を大きくするなどして剛比を大きくすればするほど、柱への分配モーメント D が大きくなり、梁端のモーメントは固定端モーメントに近づくことがわかる。（これは、固定端というのは、梁端が極めて固いものに繋がっており曲がらないという意味であることを考えてみれば納得できるであろう）



単純梁の M 図



固定梁の M 図

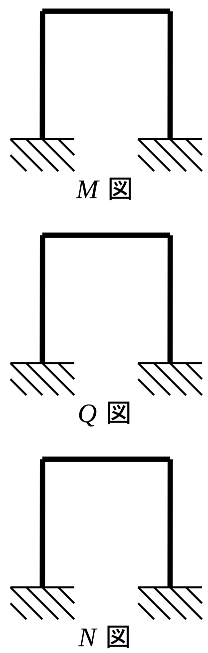


図 4.3

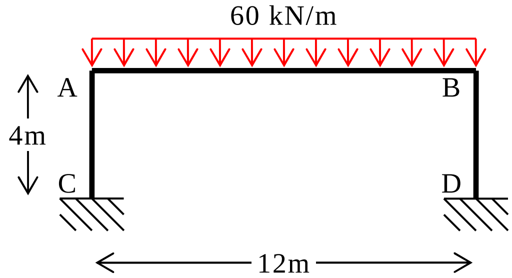
逆に、柱への分配モーメント D は小さく、梁への分配モーメントが大きくなり、最終的な梁端モーメントは小さくなる。（ピンと思えるほど柱断面が曲がりやすければ、梁端モーメントは 0 になる）

前にも述べた**「力は固いほうに流れる」**という性質をここでも見ることができる。

演習問題

［問題 4.1］

右図のラーメンの M 図、Q 図、N 図を求めよ。ただし、部材の曲げ剛性 EI は一様とする。（方法は、固定法でもたわみ角法でもよい）

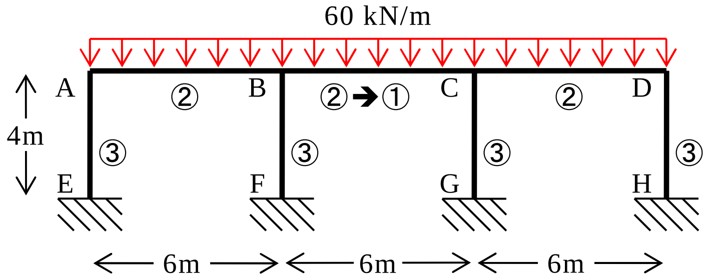


(2) スパン長さが梁応力に及ぼす影響

1 層 3 スパンラーメンについて、スパン長が変化したときの梁応力の変化の様子を検討してみる。

合計スパン長が 18m で 3 スパン（柱 4 本）として計画する場合、一般的にはスパン長を均等とし、図 4.4 のように 6m×3 スパンとする。

このときの応力を固定法で解析し M 図を描くと以下のようになる。



部材の曲げ剛性 EI は一様とする

図 4.4

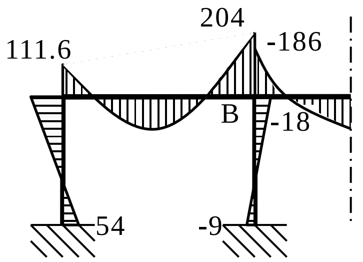


図 4.5

	AE	AB	BA	BF	BC
DF	0.60	0.40	0.33	0.50	0.17
FEM		-180	180		-180
D_1					
C_1					
D_2					
C_2					
D_3					
Σ					

	EA	FB
DF		
FEM	0	0
C_1		
C_2		
Σ		

図から、中柱の節点では、左右の梁の（スパンや荷重条件が同じ場合）固定端モーメントが釣合い、不釣合モーメントがないので、最終的な梁端モーメントは固定端モーメントとほぼ等しくなる。また、中柱にはほとんど曲げモーメントは作用しない。

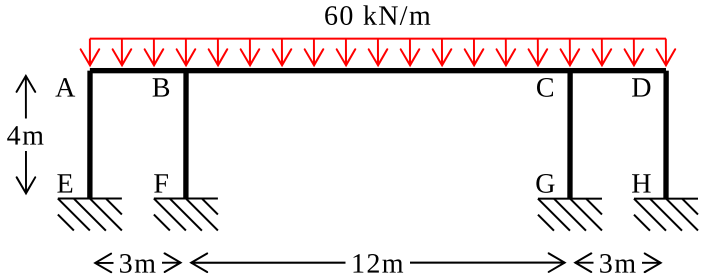
建築計画の関係で、スパン長さを均等にせず、ある部分だけ長スパンにしたいという場合もある。このとき長スパンとした梁の固定端モーメントが大きくなり、左右の梁の長さが異なると不釣合モーメントが生じて柱の曲げモーメントも大きくなるなど、部材の設計が苦しくなる場合もある。スパンが不均等な［問題 4.2］の M 図と、均等スパンの場合の図を比較すると、その違いがよく分かる。

長スパンの梁は中央の曲げモーメントが大きくなりがちで、鉛直荷重で梁が撓んでしまう恐れがある。どうしても長スパンを設ける必要がある場合は、その隣に短いスパンを設けるか、柱の剛比を出来るだけ大きくすると梁端が固定に近くなり、中央の曲げモーメントを小さくすることができる。(［問題 4.1］と［問題 4.2］の結果を比較するとよい)

演習問題

［問題 4.2］

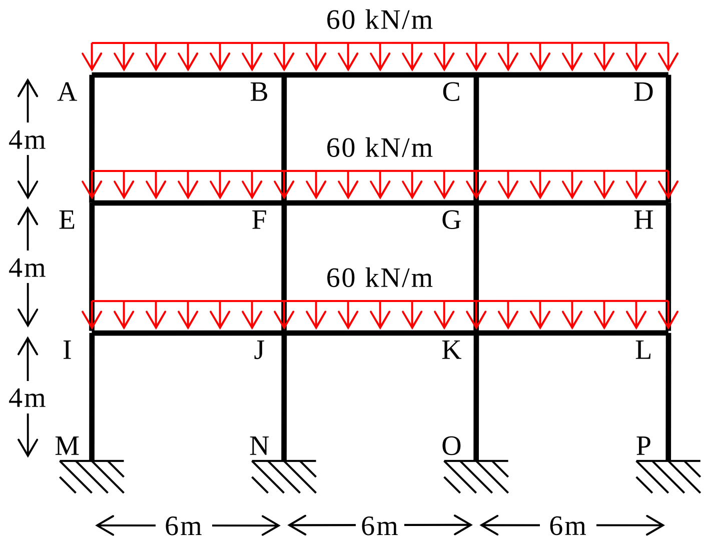
右図のラーメンの M 図、Q 図、N 図を求めよ。



(3) 多層ラーメンの応力

多層ラーメンについても同様に応力を求めることができる。

図 3.4 の 3 層 3 スパンの骨組について、鉛直荷重に対する *M* 図を描いてみると、梁の曲げモーメントの分布形状や、その大きさは、図 3.2 の 1 層骨組の場合とあまり変わらないことに気がつく。



部材の曲げ剛性 *EI* は一様とする

図 4.6

	AE		AB	BA	BF		BC
DF	0.60		0.40	0.33	0.50		0.17
FEM			-180	180			-180
D_1							
C_1							
D_2							
C_2							
D_3							
Σ							
	EI	EA	EF	FE	FJ	FB	FG
DF	0.375	0.375	0.25	0.222	0.333	0.333	0.111
FEM			-180	180			-180
D_1							
C_1							
D_2							
C_2							
D_3							
Σ							
	IM	IE	IJ	JI	JN	JF	JK
DF	0.375	0.375	0.25	0.222	0.333	0.333	0.111
FEM			-180	180			-180
D_1							
C_1							
D_2							
C_2							
D_3							
Σ							
		MI				NJ	
DF							
FEM							
C_1							
C_2							
Σ							

演習問題

［問題 4.3］

図 4.6 のラーメンについて、固定法の計算表を完成させて応力を求め、M 図を描け。

(4) 構造設計での実用的略算法

建築物の構造設計の実務を行う場合には、その大局を考えて、ラーメンの応力を求めれば十分である場合も多い。固定法で建物全体を解いて、分配･到達を誤差が無くなるまで行えば正解がえられるが、構造計画の段階やコンピュータによる計算結果を検証する場合などは、各部の応力を略算的に求めることができる。

鉛直荷重に対する骨組の応力の特徴や略算法

均等分布荷重を受け、均等スパンのラーメンでは、

(1)　中央スパンの梁端モーメントは、固定端モーメントと大差ない。

(2)　中柱の曲げモーメントは比較的小さい。

(3)　梁のせん断力や柱の軸力は、梁を単純梁として求めてもよい。

多層骨組の梁の応力は、

(1)　梁と上下の柱の端部は固定とした部分架構として略算することができる。

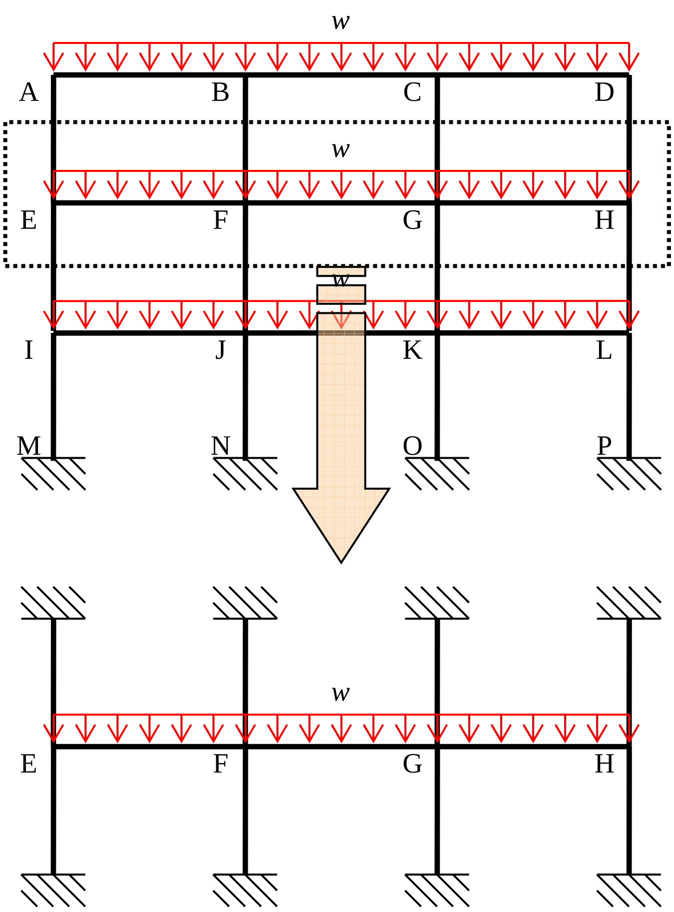


図 4.7

演習問題

［問題 4.4］

図 4.7 のラーメンについて、3 階の梁を取り出して柱の上下端を固定として略算で応力を求め、［問題 4.3］の結果と比較せよ。

4.3　水平荷重を受けるラーメン

水平荷重を受ける様々なラーメンについて、応力解析を行って、梁や柱の断面やスパン（剛比）が変化するときに、骨組にどのような応力が生じるか調べてみよう。

(1) 剛梁（梁が変形しない）の場合

外力と柱せん断力の合計はつりあう。
柱の剛比の比率で、各柱にせん断力が分配される。

図 3.5 のような、水平荷重 P を受ける 1 層 1 スパンラーメンがある。**外力 P と柱せん断力の合計**は必ずつりあう。左右の柱の剛比が等しければ、それぞれの柱にせん断力が $P/2$ ずつ分かれることになる。
梁の曲げ剛性が十分に大きく梁が変形しない（剛梁）場合には、柱の上下端（柱頭・柱脚）が両方ともたわみ角 0 で条件が同じなので、**柱頭・柱脚の曲げモーメント M は等しくなる**。柱の反曲点（M=0 となる点）は中央（高さ $h/2$）で、柱頭・柱脚の曲げモーメント M は、

$$M = \text{せん断力} \times \text{反曲点からの長さ} = \frac{P}{2} \times \frac{h}{2} = \frac{Ph}{4}$$

となる。
左右の柱の曲げ剛性が異なるときは、柱の剛比の割合でせん断力が分配される。例えば、左右の柱の剛比が 2:1 のとき、柱のせん断力はそれぞれ、$\frac{2}{3}P$ と $\frac{1}{3}P$ になる。

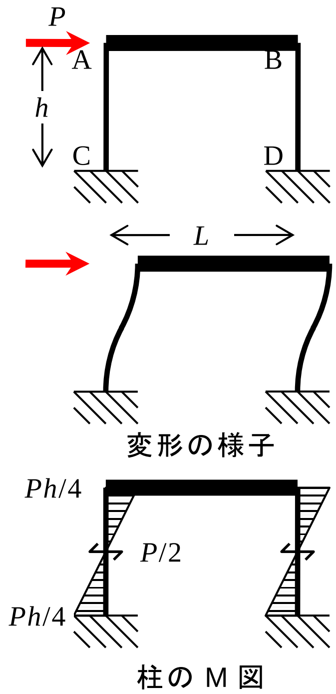


図 4.8

(2) 柱と梁の剛比が柱応力に及ぼす影響

柱頭・柱脚も曲げモーメントの大きさは、それぞれの節点の固定度により決まり、固定度の高いほうの曲げモーメントが大きくなる。

一般の骨組では、剛梁ではなく梁にも曲げ変形（たわみ角）が生じる。たわみ角の大きさは、梁の硬さ（曲げ剛性）で決まり、
- 梁の剛比が大きいほど、固定に近くたわみ角は小さい
- 梁の剛比が小さいほど、ピンに近くたわみ角は大きい

図 4.9 のような、水平力を受ける 1 層 1 スパンラーメンの応力を固定法で求めてみよう。

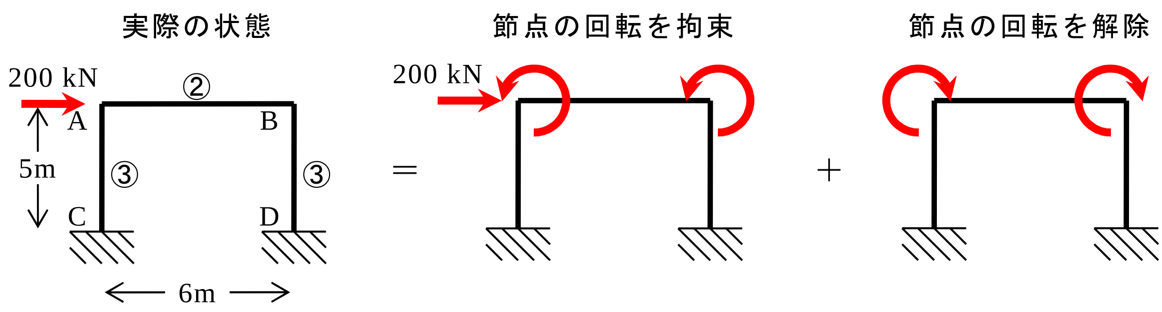


図 4.9

節点 A,B の回転を拘束した状態を考えると、図 3.5 と同じ状態である。梁 AB は逆対象部材なので、有効剛比は、2×1.5=3 となり、節点 A の分配率は、0.5 ずつである。柱頭・柱脚の固定端モーメント FEM を仮に-100（反時計回り）とおいて、固定法で応力を求める。節点 A に拘束モーメント-100 を作用させた状態をまず考える。実際には、この-100 の拘束モーメントは存在しないので、解除モーメント 100 を作用させたモーメント図を求め、重ね合わせれば求めるモーメント図が得られる。

右表より得られた柱頭・柱脚のモーメントから柱せん断力 Q を求めると、

$$Q=\frac{-75+(-50)}{5}=-25$$

柱せん断力 Q が実施の値 100kN となるように､曲げモーメントを(100/25)倍すると正解が得られる。

	CA		AC	AB
DF			0.5	0.5
FEM	-100		-100	0
D			50	50
C	25			
Σ	-75		-50	50

【参考】

比較のために、たわみ角法でモーメントを求めてみる。

未知数は、節点 A,B のたわみ角 θ_A, θ_B と柱の部材角 R の 3 個である。

ただし、対象の条件から θ_A, θ_B と

$$\theta_A = \theta_B$$

となるので、未知数は 2 個で、つりあい方程式が 2 個あれば解ける。

$\varphi = 2EK_0$ とおくと、材端モーメントは

梁 AB

$$M_{AB}=2\varphi(2\theta_A+\theta_B)=6\varphi\theta_A=M_{BA} \qquad (4.1)$$

柱 AC

$$M_{AC}=3\varphi(2\theta_A+\theta_C-3R)=3\varphi(2\theta_A-3R)$$
$$M_{CB}=3\varphi(\theta_A+2\theta_C-3R)=3\varphi(\theta_A-3R) \qquad (4.2)$$

節点での力のつりあい条件

（**外力のモーメント＝材端モーメントの和**）より、

節点 A

$$M=M_{AB}+M_{AC}=0$$
$$6\varphi\theta_A+3\varphi(2\theta_A-3R)=0 \qquad (4.3)$$
$$4\theta_A-3R=0$$

外力と層せん断力のつりあいより

層方程式

$$\frac{M_{AC}+M_{CA}}{h}=Q$$
$$3\varphi(2\theta_A-3R)+3\varphi(\theta_A-3R)=-100\times 5 \qquad (4.4)$$
$$\theta_A-2R=-\frac{500}{9\varphi}$$

式(4.3)と(4.4)を連立して解くと

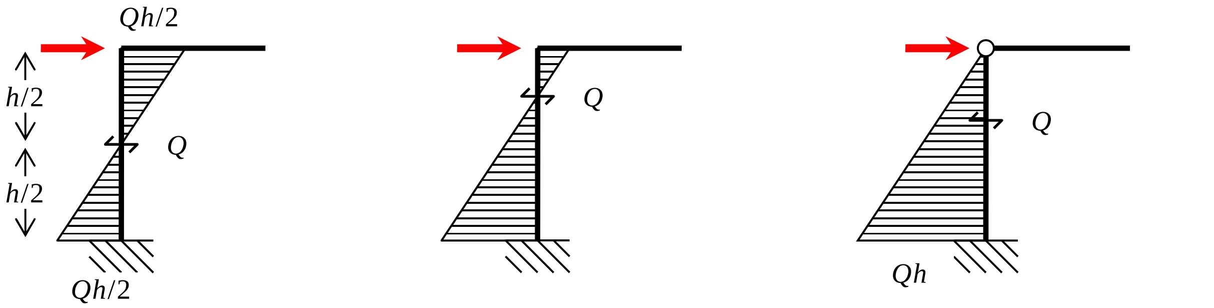
よって、$\theta_A=\dfrac{100}{3\varphi}, R=\dfrac{400}{9\varphi}$ と求まり、

各材端モーメントは、

$M_{AB}=M_{BA}=200,\quad M_{AC}=-200,\quad M_{CA}=-300$ となる。

固定法の計算をしてみると分かるように、梁の剛比が小さいほど、梁への分配モーメントのが小さくなるので、結果として柱頭のモーメントも小さくなる。その分のモーメントが柱脚に生じることになる。

(a) 剛梁の場合　　(b) 一般の梁　　(c) 単純梁



反曲点	モーメント
(a) 反曲点：柱中央	モーメント：柱頭＝柱脚
(b) 反曲点：柱中央より上	モーメント：柱頭＜柱脚（和は(a)に等しい）
(c) 反曲点：柱頭	モーメント：柱頭=0　柱脚=Qh

図 4.10

> 柱頭・柱脚の固定度が等しければ、曲げモーメントはともに $Qh/2$ になる。
> 等しくなければ、固定度が高い方は $Qh/2$ より大きく、低い方 $Qh/2$ より小さくなるが、柱頭・柱脚のモーメントの和は常に Qh になる。

演習問題

［問題 4.5］

図 4.9 のラーメンについて、梁の剛比が 0.1, 1, 5 の場合それぞれについて、曲げモーメント図を求め、上で説明した傾向があることを確かめよ。

(3) 多層多スパンのラーメン

図 4.11 のような多層・多スパンラーメンの応力（柱の曲げモーメント分布）も(2)で学んだことから、大まかな分布を予測することが出来る。

それぞれの層で

柱のせん断力の合計＝外力

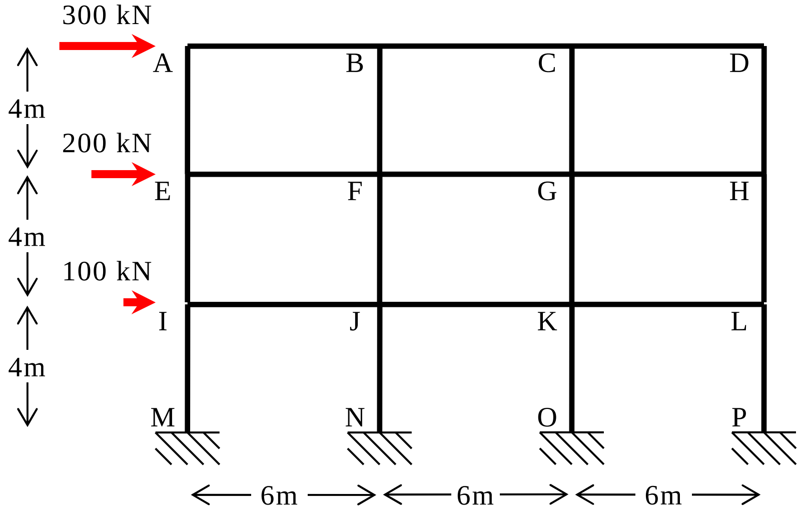
である。階の柱せん断力の合計を**層せん断力**という。

3 階の層せん断力は 300kN

2 階は 300+200=500kN

1 階は 300+200+100=600kN

である。



部材の曲げ剛性 EI は一様である

図 4.11

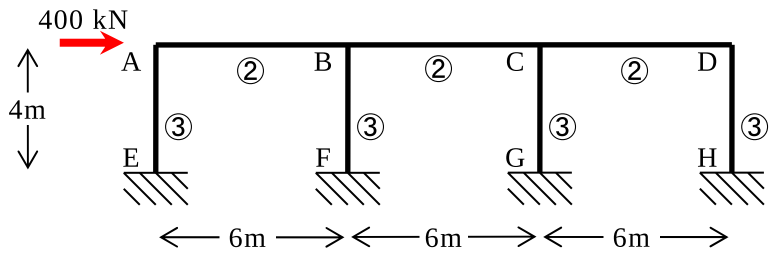
※ 地震力や風圧力のような水平荷重は、図のように一般的に上層階ほど大きな力になる。

それぞれの層での柱のせん断力の比率は、各柱の柱頭・柱脚の固定度で決まるのは前に説明した。図 4.11 の骨組みでは、1 階の柱 IM（**外柱**）と柱 JN（**中柱**）を比較すると、柱脚はともに固定なので条件は同じであるが、柱頭については、外柱には梁が 1 本しか取り付かないに対して、中柱には梁が左右に 2 本取り付くので、中柱の固定度のほうが高い。従って、外柱と中柱を比較すると、中柱のせん断力のほうが大きくなる。
柱の反曲点は、1 階では柱脚が固定なのに対して、柱頭は固定ではないので、反曲点は中央より上になる（柱脚のモーメントの方が大きい）。中間階では、柱頭・柱脚の固定度がほぼ同じなので、反曲点は柱の中央になる（柱頭・柱脚のモーメントが等しい）。最上階では、柱頭では、柱 1 本に対して梁が取り付くのに対して、柱脚では下の階の柱も含めた柱 2 本に梁が取り付くので、柱脚の固定度のほうが低くなる。従って、反曲点は中央より下になる（柱脚のモーメントの方が小さい）。

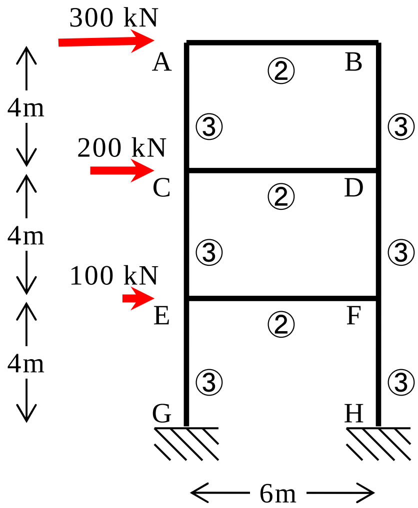
階高、スパン、部材の曲げ剛性が均一で、水平荷重を受ける多層多スパンラーメンでは、
(1)　柱のせん断力は、外柱より中柱のほうが大きくなる。
(2)　柱の反曲点は、最上階では、柱中央より下
　　　　　　　　中間階では、柱のほぼ中央
　　　　　　　　最下階では、柱中央より上
　　になる。

演習問題
［問題 4.6］
　以下の骨組の曲げモーメント図を求め、上で説明した傾向があることを確かめよ。
（解法は、固定法でもたわみ角法でもどちらでもよいが、一般的に多層ラーメンは固定法で解くのは大変である）

(1)



(2)



［問題 4.6(2)］の補足説明

問題 4.6 (2)のような多層骨組を固定法で解く場合には、1 回の計算では正解が得られず、一般的には収束計算が必要になる。

収束計算による解析は以下のような手順で行う。

① 節点の回転を拘束して、外力による層せん断力分布 Q_0 となるような固定端モーメントを各柱に与えて、固定法により応力を求める。
② 得られた応力（柱曲げモーメント）から層せん断力 Q_1 を求める。（節点の拘束モーメントを解除したので、柱の曲げモーメントが解放され、Q_1 は Q_0 より小さくなる。）
③ 不足する層せん断力 $\Delta Q_i = Q_i - Q_{i+1}$ を求める。
④ 誤差 $\Delta Q_i \neq 0$ であれば、層せん断力 ΔQ_i として①へ行き、再度計算する。誤差 $\Delta Q_i \fallingdotseq 0$ となれば、⑤へ
⑤ 求めた応力を全て足し合わせると、正解が得られる。