確率論と信頼性設計の基礎

代表的な確率分布関数 (1)

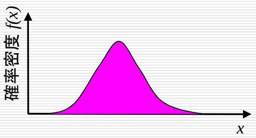
- 正規分布（ガウス分布）
  - 自然界の数量のばらつき分布とよく合うので、工学分野の分布として最も一般的
  - 統計量の平均値と標準偏差だけで表現できる

例えば、
- ✓ サイコロをN回ふったうちに偶数が出る回数
- ✓ 人間の身長
- ✓ テストの成績
- ✓ コンクリートの圧縮強度　　　などの分布

代表的な確率分布関数 (2)

- 正規分布（Normal Distribution ）の確率密度関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2}$$



σ_x : 標準偏差

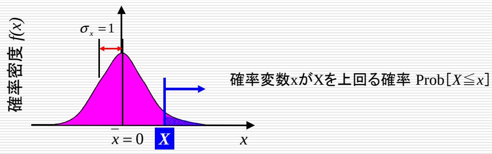
平均値　$\bar{x}=E[x]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$

$$\sigma_x{}^2=E\left[\left(x-\bar{x}\right)^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2 f(x)dx$$
$$=E\left[x^2\right]-2\bar{x}E[x]+\bar{x}^2$$
$$=E\left[x^2\right]-\bar{x}^2$$

変動係数　$V_x=\frac{\sigma_x}{\bar{x}}$

代表的な確率分布関数 (3)

- 標準正規分布
  - 平均値=0、標準偏差σx=1の正規分布

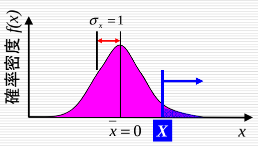


X	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0
Prob[X≦x] (%)	15.8	6.7	2.3	0.62	0.14	0.003

代表的な確率分布関数 (4)

- 対数正規分布
  - 確率変数xの自然対数ln xが正規分布
  - Xが正の値しか持たない（x＞1）分布形としてよく用いる

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln x}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\overline{\ln x}}{\sigma_{\ln x}}\right)^2}$$



例題1

- 東北大学の男子学生の身長の平均が170cmで、変動係数が10%で、正規分布に従うとする。身長2m以上の学生は、全体の何%いるか？

確定論 vs. 確率論 (1)

- 現行の設計法
  - 「地震力に対して、骨組に生じる応力Sが強度Rを超えない」 ➔ 確定論

しかし、
「どんな地震でも絶対に壊れない構造物」は存在しない

- 基準法で(ルールとして)定めた設計用荷重に対する安全性を保証しているに過ぎない
- 設計用荷重を超えた場合の安全性は？
- 設計用荷重に対する余裕度も？

確定論 vs. 確率論 (2)

- 信頼性設計法
  - 「地震力に対して、骨組に生じる応力Sが強度Rを超える確率が5%」 ➔ 確率論

- 限界状態設計法

日本建築学会「建築物の限界状態設計指針」、2004

構造物の限界状態の発生確率を許容確率以下となるように設計

「限界状態」＝それを超えると構造物が設計上の要求性能を満足できなくなる状態

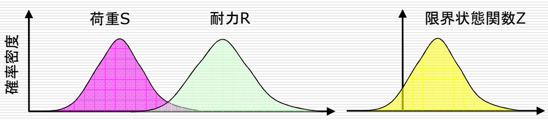
✓ 使用限界、損傷(修復)限界、安全(終局)限界

限界状態関数と破壊確率

- 構造物の荷重Sと耐力R(ともに確率変数)から限界状態関数(性能関数)Zを以下で定義する

Z=R-S

荷重S＞耐力R のとき破壊するので、
Z≦0となる確率が破壊確率Pf

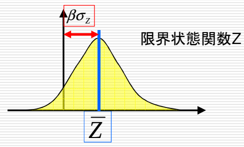


限界状態関数Zと信頼性指標β

- 荷重Sと耐力Rがともに確率変数のとき、限界状態関数Zも確率変数になり、平均値と標準偏差は

$$\overline{Z} = \overline{R} - \overline{S}$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^{\ 2} + \sigma_S^{\ 2}}$$



- 信頼性指標β

Zの分布形に応じてβから破壊確率Pfが求まる。

$$\beta = \frac{\overline{Z}}{\sigma_Z} = \frac{\overline{R} - \overline{S}}{\sqrt{\sigma_R^{\ 2} + \sigma_S^{\ 2}}}$$

参考

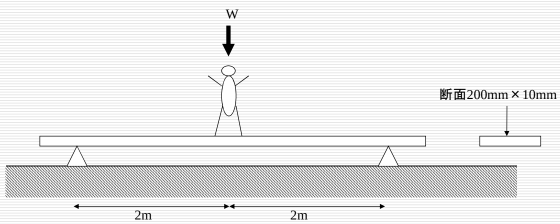
独立な変数X,Yの差Z=X-Yの平均値と標準偏差の求め方

$$\overline{Z} = \overline{X - Y} = \frac{\sum_{n=1}^{N}(X_i - Y_i)}{N} = \frac{\sum_{n=1}^{N} X_i}{N} - \frac{\sum_{n=1}^{N} Y_i}{N} = \overline{X} - \overline{Y}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{\ 2} &= \overline{Z^2} - \overline{Z}^2 = \overline{(X - Y)^2} - \left(\overline{X} - \overline{Y}\right)^2 \\
&= \left(\overline{X^2} - 2\overline{XY} + \overline{Y^2}\right) - \left(\overline{X}^2 - 2\overline{X}\cdot\overline{Y} + \overline{Y}^2\right) \\
&= \left(\overline{X^2} - \overline{X}^2\right) + \left(\overline{Y^2} - \overline{Y}^2\right) + \left(2\overline{XY} - 2\overline{X}\cdot\overline{Y}\right) \\
&= \sigma_X^{\ 2} + \sigma_Y^{\ 2}
\end{aligned}$$

例題2

下図のような単純梁の中央に人が乗る。梁は、鋼板で、断面寸法200mm×10mm、スパン4m、ヤング係数は2×10^5 N/mm²である。また、人の重量Wは平均600N、変動係数15%である。



例題2 （続き）

1. 梁から床までの高さが0.3m（確定値）であるとき、「梁中央が接地する」ことに対する信頼性指標βを求めよ。
2. 梁から床までは十分に高いとする。鋼材の降伏強度σyが平均300 N/mm²、変動係数10%のとき、「梁が降伏する」ことに対する信頼性指標βを求めよ。

限界状態設計法の3つのレベル

- レベル3：真の破壊確率を正確に評価する。全ての不確定要因の確率分布を正しく評価することが必要。
- レベル2：破壊モードに対する限界状態関数Zの平均値と標準偏差から、信頼性指標βを求め、β≧目標信頼性指標βTとなるように設計。（分布を正規分布とするなどの一部の仮定あり）
- レベル1：部分安全係数（荷重係数、耐力係数）を、荷重の特性値、耐力の公称値に乗じて割増（低減）し

  （荷重）≦（耐力）　となるように設計する。

  従来の設計法とFormatは似ているので、一般には理解しやすい

  （荷重耐力係数法・部分安全係数と呼ばれている）

荷重係数・耐力係数の求め方

$\beta = \dfrac{\bar{Z}}{\sigma_Z} = \dfrac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \ge \beta_T$ より　$\bar{R} \ge \bar{S} + \beta_T \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$

ここで，分離係数α_R，α_Sを用いて　$\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \approx \alpha_R \sigma_R + \alpha_S \sigma_S$　と近似すると，

$$\boxed{\bar{R} - \beta_T \alpha_R \sigma_R \ge \bar{S} + \beta_T \alpha_S \sigma_S}$$

$$\left(1 - \beta_T \alpha_R \frac{\sigma_R}{\bar{R}}\right)\bar{R} \ge \left(1 + \beta_T \alpha_S \frac{\sigma_S}{\bar{S}}\right)\bar{S}$$

$$(1 - \beta_T \alpha_R V_R)\bar{R} \ge (1 + \beta_T \alpha_S V_S)\bar{S}$$

荷重の特性値S_n，耐力の公称値R_nを用いて書き換えると，

$$\boxed{(1 - \beta_T \alpha_R V_R)\frac{\bar{R}}{R_n} R_n \ge (1 + \beta_T \alpha_S V_S)\frac{\bar{S}}{S_n} S_n}$$

耐力係数　$\phi = (1 - \beta_T \alpha_R V_R)\dfrac{\bar{R}}{R_n}$

荷重係数　$\gamma = (1 + \beta_T \alpha_S V_S)\dfrac{\bar{S}}{S_n}$

分離係数　$\alpha_R = \dfrac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \approx \dfrac{V_R}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}$

$$\alpha_S = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \approx \frac{V_S}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}$$

部分安全係数法による設計

（耐力係数）×（耐力）　≧　（荷重係数）×（荷重）

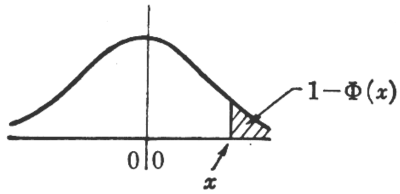
$$\boxed{\phi R_n \ge \gamma S_n}$$

- 参考文献

  - 神田順　編，「限界状態設計法のすすめ　その魅力と可能性を探る」，建築技術，1993年
  - 星谷勝，石井清，「構造物の信頼性設計法」，鹿島出版会，1986年

付表　標準正規確率密度関数の面積

$$1-\Phi(x)=\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$$



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139

x	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
3	.00135	$.0^{3}968$	$.0^{3}687$	$.0^{3}483$	$.0^{3}337$	$.0^{3}233$	$.0^{3}159$	$.0^{3}108$	$.0^{4}723$	$.0^{4}481$
4	$.0^{4}317$	$.0^{4}207$	$.0^{4}133$	$.0^{5}854$	$.0^{5}541$	$.0^{5}340$	$.0^{5}211$	$.0^{5}130$	$.0^{6}793$	$.0^{6}479$
5	$.0^{6}287$	$.0^{6}170$	$.0^{7}996$	$.0^{7}579$	$.0^{7}333$	$.0^{7}190$	$.0^{7}107$	$.0^{8}599$	$.0^{8}332$	$.0^{8}182$
6	$.0^{9}987$	$.0^{9}530$	$.0^{9}282$	$.0^{9}149$	$.0^{10}777$	$.0^{10}402$	$.0^{10}206$	$.0^{10}104$	$.0^{11}523$	$.0^{11}260$